Reversibilität und Irreversibilität in linearen passiven Systemen

Von J. Meixner

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Aachen
(Z. Naturforschg. **16 a**, 721—726 [1961]; eingegangen am 29. April 1961)

Herrn Professor Dr. phil. Karl Bechert *zu seinem 60. Geburtstag gewidmet*

Nach einer Definition der linearen passiven Systeme und der Angabe von Beispielen werden ihre wichtigsten Eigenschaften wiedergegeben. Von besonderer Bedeutung sind ihre beiden Spektralfunktionen. Es werden zwei verschiedene Grade der Irreversibilität definiert, die schwache und die starke Irreversibilität, und beide werden in Zusammenhang mit Eigenschaften der Spektralfunktionen gebracht. Schließlich wird gezeigt, unter welchen Umständen bei einem reversiblen System wenigstens für ein endliches Zeitintervall angenähert schwache Irreversibilität besteht.

Unter den linearen passiven Systemen gibt es typisch reversible Systeme wie den harmonischen Oszillator und typisch irreversible Systeme wie den Ohmschen Widerstand. Man kann sich daher die Frage stellen, unter welchen Umständen die im nächsten Abschnitt abstrakt definierten linearen passiven Systeme reversibel oder irreversibel sind. Dies läuft darauf hinaus, daß man Kriterien angibt, unter welchen die linearen Transformationen, welche die linearen passiven Systeme charakterisieren, reversibel oder irreversibel sind. Nun werden die linearen passiven Transformationen durch zwei nicht negative Konstanten und eine Spektralfunktion oder eine Nachwirkungsfunktion, oder auch durch eine Impedanzfunktion erzeugt. Es handelt sich also darum, Eigenschaften der Spektralfunktionen oder der Nachwirkungsfunktionen oder auch der Impedanz anzugeben, welche die Reversibilität oder Irreversibilität garantieren. Tatsächlich liegt das Problem schwieriger, da Nichtreversibilität noch nicht notwendig Irreversibilität im thermodynamischen Sinne, d. h. die Existenz einer positiven Entropieproduktion, bedeutet. Man muß verschiedene Grade der Irreversibilität betrachten, und unsere Aufgabe wird es sein, zwei Arten von Irreversibilität einzuführen, die wir als schwache und starke Irreversibilität bezeichnen. Die erste liegt dann vor, wenn das Erinnerungsvermögen des Systems für seine frühere Behandlung mehr und mehr schwindet. Die zweite besteht dann, wenn im System in einem gewissen Sinne Verluste und damit etwas wie eine Entropieproduktion auftreten.

1. Definition der linearen passiven Systeme

Ein lineares passives System ist im einfachsten Falle durch zwei reelle Funktionen der Zeit $f(t)$ (Einwirkung oder Kraft) und $F(t)$ (Reaktion) definiert, die in folgender funktionaler Beziehung zueinander stehen [durch $f(t) \rightarrow F(t)$ ausgedrückt].

I. Superpositionsprinzip. Wenn $f_1(t) \rightarrow F_1(t)$ und $f_2(t) \rightarrow F_2(t)$, dann gilt mit beliebigen reellen Konstanten a_1, a_2 auch

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \rightarrow a_1 F_1(t) + a_2 F_2(t).$$

II. Translationsinvarianz in der Zeit. Wenn $f(t) \rightarrow F(t)$, dann gilt auch $f(t+\tau) \rightarrow F(t+\tau)$ mit beliebigem reellen τ.

III. Kausalität. Ist $f(t) = 0$ für $t < t_0$ mit beliebigem reellen t_0, so ist auch $F(t) = 0$ für $t < t_0$.

IV. Passivität. Ist $f(t) = 0$ für $t < t_0$ mit beliebigem reellen t_0 [d. h. stellt $f(t)$ einen Einschaltvorgang dar], so gilt

$$\int_{-\infty}^{\tau} f(t) \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t \geq 0 \quad \text{für alle reellen } \tau. \tag{1}$$

V. Stetigkeit. Sei C^m die Klasse der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen, die für $t < t_0$ (t_0 endlich) verschwinden. t_0 kann von Funktion zu Funktion verschieden sein. Die Klasse der zugelassenen Funktionen $f(t)$ sei dann C^∞ und es wird verlangt, daß $F(t)$ der Funktionenklasse C^0 angehört, also wenigstens stetig ist.

Die Kausalität III ist als besonderes Postulat entbehrlich, da sie aus I und IV folgt. Die Stetigkeit V oder eine andere Festlegung der zuzulassenden Funktionenklassen ist für die Entwicklung einer definiten mathematischen Theorie notwendig. V ist sicher eine schwache Forderung, da sie zuläßt, daß im Übergang $f(t) \rightarrow F(t)$ unendlich viele Ableitungen verlorengehen. Tatsächlich ist es eine Folge der Postulate I bis V, daß höchstens eine Ableitung verlorengeht und höchstens drei Ableitungen gewonnen werden. Man kann daher die Funktionenklasse $f(t)$ auf C^1 erweitern und hat dann $F(t)$ in C^m mit $0 \leq m \leq 4$.

Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß $f(t)$ und $F(t)$ gewöhnliche Funktionen sind. Die Theorie kann auf vektorwertige Funktionen und auf Funktionen mit Werten in einem HILBERT- oder BANACH-Raum erweitert werden.

2. Beispiele

Das einfachste Beispiel ist eine Masse an einer elastischen Feder, deren anderes Ende festgehalten ist. Die Bewegungsgleichung lautet $m\ddot{x}+k\,x=f(t)$, wenn $f(t)$ die an der Masse angreifende äußere Kraft ist. Identifiziert man $x(t)$ mit $F(t)$, so kann man unmittelbar die Postulate I bis V verifizieren. IV sagt einfach aus, daß die Summe von kinetischer und potentieller Energie nicht negativ sein kann.

Ein weiteres Beispiel stellen die passiven elektrischen Zweipole dar. Die angelegte Spannung $u(t)$ mit $u(t)=0$ für $t<t_0$ (t_0 beliebig) ist hier mit $f(t)$ zu identifizieren, während $F(t)$ das Zeitintegral des elektrischen Stromes, also die bis zum Zeitpunkt t in das Netzwerk geflossene Ladung ist.

Thermodynamische Systeme mit $f(t)$ als intensivem Parameter und $F(t)$ als konjugiertem extensiven Parameter, beide im ursprünglichen Gleichgewichtszustand zu Null normiert (etwa Spannung und Dehnung), liefern weitere Beispiele, wobei allerdings kleine Abweichungen vom Ausgangszustand vorauszusetzen sind, damit I besteht.

Ein weiteres recht allgemeines Beispiel liefern kanonische Gesamtheiten, klassische oder quantenmechanische, die durch eine schwache Störung beeinflußt werden. Sei die HAMILTON-Funktion des Systems

$$H(q_i, p_i, t)=H_0+H_1=H_0(q_i, p_i)-F(q_i, p_i)\,f(t), \tag{2}$$

wobei H_1 die Störung durch die Einwirkung $f(t)$ darstellen soll. Die Dichtematrix ϱ_0 – wir besprechen hier nur den quantenmechanischen Fall – der Gesamtheit sei kanonisch, solange $f(t)$ verschwindet, also

$$\varrho=\varrho_0=\exp(-H_0/kT)/Z \tag{3}$$

mit $Z=$ Zustandssumme. Nach Einschalten der Störung wird $\varrho(t)=\varrho_0+\varrho_1(q,p,t)$ und zwischen $F(t)=\operatorname{Spur} F(q,p)\,\varrho_1(t)$ und $f(t)$ bestehen die durch II, III, IV ausgedrückten Relationen allgemein, während die Gültigkeit von I auf schwache Störungen beschränkt bleibt.

[1] H. KÖNIG u. J. MEIXNER, Math. Nachr. **19**, 265 [1958].
[2] H. KÖNIG, Arch. Math. **10**, 447 [1959].

3. Wichtigste Eigenschaften

Auf der Basis der Postulate I bis V haben KÖNIG und MEIXNER [1] und KÖNIG [2] eine ausführliche Theorie der linearen passiven Systeme entwickelt. Wir stellen hier die wichtigsten Eigenschaften zusammen.

Ein lineares passives System ist vollkommen charakterisiert durch zwei nicht negative Konstanten A^0, B^0 und eine Spektralfunktion $\varphi^0(\varrho)$ $(-\infty<\varrho<\infty)$. Sie ist reell, beschränkt, nicht abnehmend, ungerade und bei $\varrho=0$ stetig. Wenn es wenigstens eine Funktion $F(t)$ gibt, die nicht identisch verschwindet, dann ist

$$0<A^0+B^0+\varphi^0(\infty)-\varphi^0(-\infty)<\infty \tag{4}$$

und die Zuordnung $f(t)\to F(t)$ kann eindeutig umgekehrt werden in $F(t)\to f(t)$. Die Umkehrung ist gekennzeichnet durch zwei nicht negative Konstanten A, B und eine Spektralfunktion $\varphi(\varrho)$ mit denselben allgemeinen Eigenschaften wie $\varphi^0(\varrho)$. Es gilt

$$0<A+B+\varphi(\infty)-\varphi(-\infty)<\infty\,. \tag{5}$$

Die Spektralfunktionen definieren zwei Nachwirkungsfunktionen

$$P^0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\varrho t\,\mathrm{d}\varphi^0(\varrho), \qquad P(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\varrho t\,\mathrm{d}\varphi(\varrho). \tag{6}$$

Damit kann man den funktionalen Zusammenhang zwischen $f(t)$ und $F(t)$ ebenso wie seine Umkehrung für alle t in folgender Weise darstellen:

$$F(t)=[A^0+P^0(0)]\,f(t) + \int_0^\infty f(t-u)\,[B^0 u+\int_0^u P^0(v)\,\mathrm{d}v]\,\mathrm{d}u + \int_0^\infty f'(t-u)\,[P^0(0)-P^0(u)]\,\mathrm{d}u, \tag{7}$$

$$f(t)=A\,F''(t)+B\,F(t)+\int_0^\infty F'(t-u)\,P(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^\infty F'''(t-u)\,[P(0)-P(u)]\,\mathrm{d}u. \tag{8}$$

Für alle Funktionen $f(t)$, die für $t\leq 0$ verschwinden, gilt

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t=s\,Z(s)\int_0^\infty e^{-st}\,F(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\Re\mathrm{e}\, s>0). \tag{9}$$

$Z(s)$ ist die Impedanzfunktion des Systems. Ihre Reziproke $Y(s)$ ist die Admittanzfunktion. Es gelten folgende Darstellungen:

$$Y(s) = A^0 s + \frac{B^0}{s} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-i\varrho s}{s-i\varrho} \, d\varphi^0(\varrho), \qquad (10)$$

$$Z(s) = A s + \frac{B}{s} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-i\varrho s}{s-i\varrho} \, d\varphi(\varrho) \, . \qquad (11)$$

A, B, $\varphi(\varrho)$ sind mittels $Y(s)\,Z(s) = 1$ aus A^0, B^0, $\varphi^0(\varrho)$ bestimmbar, und man hat

$$A A^0 = 0 \, , \qquad B B^0 = 0 \, . \qquad (12)$$

Die linearen Systeme sind damit vollkommen charakterisiert. Die Klasse der möglichen Impedanzfunktionen ist die der positiven Funktionen im Sinne der Netzwerktheorie (CAUER [3]). Die möglichen Nachwirkungsfunktionen sind die positiv definiten Funktionen im Sinne von BOCHNER [4].

4. Schwache Irreversibilität

Ein Netzwerk, das nur endlich viele Kapazitäten und Induktivitäten enthält, ist reversibel. Seine Spektralfunktionen $\varphi^0(\varrho)$ und $\varphi(\varrho)$ sind reine Sprungfunktionen. Dasselbe gilt für ein endliches System von gekoppelten harmonischen Oszillatoren, an deren einem eine Kraft $f(t)$ angreift und eine Elongation $F(t)$ hervorruft. Die Nachwirkungsfunktionen $P^0(t)$ und $P(t)$ sind dann fastperiodisch und es gilt

$$\limsup_{t\to\infty} P^0(t) = P^0(0), \qquad \limsup_{t\to\infty} P(t) = P(0). \qquad (13)$$

Keine dieser Eigenschaften gilt für ein solches lineares passives System, das man gemeinhin als irreversibel anspricht. Für einen reinen OHMschen Widerstand R etwa sind $P^0(t)$ und $P(t)$ fallende Exponentialfunktionen mit den Grenzwerten 0 für $t\to\infty$. Dieselben Grenzwerte bestehen für jedes lineare thermodynamische System.

Wir wollen deshalb folgende Definition vorschlagen: *Definition der schwachen Irreversibilität* [5]. Ein lineares passives System ist schwach irreversibel, wenn sein Gedächtnis nicht unendlich weit zurückreicht, mit anderen Worten, wenn

$$\lim_{t\to\infty} P^0(t) = 0; \qquad \lim_{t\to\infty} P(t) = 0 \, . \qquad (14)$$

Zwischen der schwachen Irreversibilität, wie sie hier definiert ist, und der in (13) ausgedrückten Reversibilität lassen sich noch viele Zwischenstufen einschalten, in denen man nicht mehr von echter Reversibilität sprechen kann. Ein System, das nach der obigen Definition schwach irreversibel ist, ist jedoch in besonderer Weise ausgezeichnet, nämlich in bezug auf seine Spektralfunktion und auf die Existenz eines Gleichgewichtswertes der Kraft $f(t)$. Wir formulieren diese Eigenschaften in folgender Weise:

Theorem I. Damit eine der Beziehungen (14) gilt, ist notwendig, daß die zugeordnete Spektralfunktion $\varphi^0(\varrho)$ bzw. $\varphi(\varrho)$ in $-\infty < \varrho < \infty$ stetig ist, und es ist hinreichend, daß sie in jedem abgeschlossenen endlichen Intervall absolut stetig ist.

Theorem II. Sei $F(t) = c$ ($=$ konstant) für $t > 0$; dann existiert der Grenzwert von $f(t)$ für $t\to\infty$ genau dann, wenn $P(t)\to 0$ für $t\to\infty$. Der Grenzwert selbst ist $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = B c$.

Theorem III. Sei $f(t) = c$ ($=$ konstant) für $t > 0$; dann existiert der Grenzwert von $F''(t)$ für $t\to\infty$ genau dann, wenn $P^0(t)\to 0$ für $t\to\infty$. Der Grenzwert selbst ist $\lim\limits_{t\to\infty} F''(t) = B^0 c$.

In den letzten beiden Theoremen, ebenso wie in den Darstellungen (7) und (8), kommt zum Ausdruck, daß die Beziehung zwischen $f(t)$ und $F(t)$ nicht symmetrisch ist. Man kann sich diesen Sachverhalt ohne weiteres an elektrischen Netzwerken klarmachen. Interpretieren wir andererseits $f(t)$ als elastische Schubspannung, $F(t)$ als elastische Schubverformung, dann besagt Theorem II für $B = 0$, daß die Spannung auf Null relaxiert. Dies ist charakteristisch für lineare Systeme, die die Eigenschaft des Fließens besitzen. Der Charakter des Fließens ist dann durch Theorem III gegeben, wonach bei konstanter Spannung die Verformung nach einer Übergangsperiode schließlich wie $\frac{1}{2} B^0 c\, t^2$ anwächst. Ist gleichzeitig mit B auch $B^0 = 0$, so erfolgt ein schwächerer Anstieg der Verformung.

Ist $B \neq 0$, dann gibt es kein Fließen, und Theorem III läßt sich durch eine stärkere Aussage ersetzen. Nach (12) gilt in diesem Fall $B^0 = 0$, weiter ist das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi^0(\varrho)/\varrho^2$ konvergent. Wir füh-

[3] W. CAUER, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Akademie Verlag, Berlin 1954.

[4] S. BOCHNER, Vorlesungen über FOURIERsche Integrale, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1932.

[5] Wir schließen den trivialen Fall $P^0(t) \equiv 0$, der $P(t) \equiv 0$ nach sich zieht, aus. Dann ist $f(t) = A F''(t) + B F(t)$ und das System ist von typisch reversiblem Charakter.

ren die positiv definite Funktion

$$R^0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \varrho t \frac{1+\varrho^2}{\varrho^2} \, d\varphi(\varrho) \qquad (15)$$

ein, welche zur Funktion $P^0(t)$ in der Beziehung

$$P^0(t) = \frac{d^2}{dt^2} [P^0(t) - R^0(t)] \qquad (16)$$

steht. Dann gilt

Theorem IV. Ist $B>0$, so folgt aus $P^0(t) \to 0$ für $t \to \infty$ auch $R^0(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Theorem V. Ist $B>0$ und $f(t) = c$ (= konstant) für $t>0$, dann existiert der Grenzwert von $F(t)$ für $t \to \infty$ genau dann, wenn $R^0(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Der Grenzwert selbst ist

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = c[A^0 + R^0(0)] = c/B.$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen und spezialisieren sie zugleich auf thermodynamische Systeme in dem

Theorem VI. Bei thermodynamischen Systemen ist die schwache Irreversibilität gleichwertig mit der Einstellung der intensiven Variablen auf einen Gleichgewichtswert bei konstantem Wert der extensiven Variablen und mit der Einstellung der zweiten Ableitung der extensiven Variablen auf einen Gleichgewichtswert bei konstant gehaltener intensiver Variablen. Ist insbesondere $B \neq 0$, so hat die schwache Irreversibilität zur Folge, daß auch die extensive Variable selbst einem Gleichgewichtswert zustrebt.

Bedingungen von der Art (14) sind verschiedentlich als Kriterien der Irreversibilität benutzt worden, so von TURNER [6] und von SAITÔ [7].

5. Starke Irreversibilität

Man kann eine andere Definition der Irreversibilität einführen. Wir knüpfen dazu an die Eigenschaften der elektrischen Netzwerke an. Sei $f(t) = u(t) =$ elektrische Spannung, $F'(t) = i(t) =$ elektrischer Strom. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\tau} u(t) \cdot i(t) \, dt \geq 0 \quad \text{für alle } \tau. \qquad (17)$$

Das Integral stellt die dem Netzwerk bis zur Zeit $t = \tau$ zugeführte Energie dar. Wir stellen nun die Frage, ob man durch geeignete Fortsetzung des Spannungsverlaufs nach der Zeit τ die zugeführte Energie wieder aus dem Netzwerk herausholen kann, mit anderen Worten, den Wert des Integrals für $t \to \infty$ beliebig klein machen kann. Wenn dies nicht der Fall ist, nennen wir das Netzwerk stark irreversibel. Diese Eigenschaft hat es immer dann, wenn JOULEsche Wärmeverluste auftreten, und es besitzt sie nicht, wenn das Netzwerk nur aus endlich vielen Kondensatoren und Induktivitäten besteht. Die letztere Aussage folgt aus dem unten gegebenen Theorem VIII.

Allgemein gehen wir so vor. Sei $f(t)$ eine Funktion in C^1 und $\hat{f}(t, \tau)$ die Gesamtheit der Funktionen in C^1, die mit $f(t)$ bis zur Zeit $t = \tau$ übereinstimmen. Sei ferner $\hat{F}(t, \tau)$ die Reaktion auf die Einwirkung $\hat{f}(t, \tau)$; sie stimmt mit $F(t)$, der Reaktion auf die Einwirkung $f(t)$, bis zum Zeitpunkt τ überein. Sei schließlich

$$\hat{\psi}(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t, \tau) \frac{d}{dt} \hat{F}(t, \tau) \, dt. \qquad (18)$$

Wir bezeichnen dann

$$\psi(f, \tau) = \operatorname{Inf} \hat{\psi}(f, \tau) \qquad (19)$$

als den nicht rückgewinnbaren oder verlorenen Teil des Integrals (1) für die Funktion f zur Zeit τ [Inf = größte untere Grenze über die Gesamtheit der Funktionen $\hat{f}(t, \tau)$]. Die Funktion $\psi(f, \tau)$ ist offenbar monoton nicht abnehmend. Damit sind wir vorbereitet für die

Definition der starken Irreversibilität. Wir nennen ein lineares passives System stark irreversibel, wenn es Funktionen $f(t)$ in C^1 gibt, für welche der verlorene Teil des Integrals (1) für irgendein $t = \tau$ und damit für alle $t \geqq \tau$ positiv ist.

Die Funktion $\psi(f, \tau)$ hängt natürlich mit der Entropieproduktion zusammen, doch wollen wir den Zusammenhang hier nicht näher erläutern. Jedenfalls ist es nicht möglich, von einer positiven Entropieproduktion zu sprechen, wenn das System nicht stark irreversibel ist.

Sind $\varphi(\varrho)$ und $\varphi^0(\varrho)$ absolut stetig, so ist die letzte Definition der Irreversibilität stärker als die erste. Man erkennt dies an folgenden Theoremen.

Theorem VII. Starke Irreversibilität besteht nicht, wenn

$$\limsup_{t\to\infty} P(t) = P(0). \qquad (20)$$

Damit ist bewiesen, daß in elektrischen Reaktanz-

[6] R. E. TURNER, Physica **26**, 269, 274 [1960].
[7] N. SAITÔ, Phys. Rev. **117**, 1163 [1960].

netzwerken (nur aus endlich vielen Kondensatoren und Induktivitäten bestehend) in jedem Fall die hineingebrachte Energie durch geeignete Manipulation der Spannung wieder herausgeholt werden kann.

Theorem VIII. Starke Irreversibilität besteht nicht, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log \varphi'(\varrho)|}{1+\varrho^2} \, d\varphi(\varrho) = \infty . \qquad (21)$$

Hierin bedeutet $\varphi'(\varrho)$ die Ableitung des absolut stetigen Anteils der Spektralfunktion $\varphi(\varrho)$, d. h. nach Abzug des Sprunganteils und des singulären Anteils.

Daraus folgt beispielweise, daß ein lineares passives System mit absolut stetigen Spektralfunktionen $\varphi^0(\varrho)$ und $\varphi(\varrho)$, das also schwach irreversibel ist, jedenfalls dann nicht die Eigenschaft der starken Irreversibilität besitzt, wenn $\varphi(\varrho)$ in irgend einem endlichen Intervall konstant ist.

Kristalle mit harmonischer Wechselwirkung der Bausteine sind reversible lineare Systeme; im Grenzfall unendlicher Größe sind sie schwach irreversible lineare Systeme, jedoch nicht stark irreversibel, da das Schwingungsspektrum nur einen endlichen Bereich umfaßt und damit die Spektralfunktionen außerhalb dieses Bereiches konstant sind. Die Schwierigkeiten, in einem Kristall mit harmonischer Wechselwirkung der Bestandteile irreversibles Verhalten, etwa das Wärmeleitungsgesetz, zu begründen, sind wohlbekannt. Ihre Wurzel dürfte hier auf einfachste Weise bloßgelegt sein.

6. Praktisch schwache Irreversibilität

Weder ein endlicher Kristall mit harmonischer Wechselwirkung noch ein elektrisches Reaktanznetzwerk mit endlich vielen Elementen sind im einen oder anderen Sinne irreversibel. Wir können höchstens erwarten, daß sie im Grenzfall einer unendlichen Anzahl von Bestandteilen oder Elementen irreversibles Verhalten zeigen. Aber bereits vor dem endgültigen Grenzübergang sollten sich Züge andeuten, die die schließliche Irreversibilität ankündigen. In diesem Falle wollen wir von praktischer Irreversibilität sprechen.

Wir betrachten zu diesem Zweck eine unendliche Folge von typisch reversiblen Systemen, charakterisiert durch Konstanten A_n^0, B_n^0 und Spektralfunktionen $\varphi_n^0(\varrho)$ mit $n = 1, 2, 3 \ldots$. Die Folge von Systemen kann zum Beispiel ein Kristall sein mit n Atomen, die in harmonischer Wechselwirkung stehen, wobei wieder $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall $B_n \neq 0$ und $\lim_{n\to\infty} B_n = B \neq 0$. Ferner nehmen wir an, daß $\lim_{n\to\infty} A_n^0 = A^0$ existiert und endlich ist. Damit folgt nach (12) $B_n^0 = B^0 = 0$, und es existiert eine Folge von Spektralfunktionen $\chi_n^0(\varrho)$ mit

$$d\chi_n^0(\varrho) = \frac{1+\varrho^2}{\varrho^2} \, d\varphi_n^0(\varrho) \qquad (n = 1, 2 \ldots) \qquad (22)$$

und eine Folge von Nachwirkungsfunktionen

$$R_n^0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \varrho t \, d\chi_n^0(\varrho) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (23)$$

derart, daß

$$F_n(t) = A_n^0 f(t) + \int_0^{\infty} f'(t-u) \, [R_n^0(0) - R_n^0(u)] \, du . \qquad (24)$$

Es gilt dann

Theorem IX. Falls punktweise, einschließlich $\varrho = \pm\infty$ für $n \to \infty$ gilt $\chi_n^0(\varrho) \to \chi(\varrho)$, dann gilt für $n \to \infty$ und alle endlichen t punktweise $R_n^0(t) \to R^0(t)$, wobei die Konvergenz in jedem endlichen Intervall gleichmäßig ist. Die Reaktionen $F_n(t)$ konvergieren gegen eine Grenzfunktion

$$F(t) = A^0 f(t) + \int_0^{\infty} f'(t-u) \, [R^0(0) - R^0(u)] \, du . \qquad (25)$$

Sei nun ein Zeitintervall $0 < t < T$ vorgegeben und sei $f(t) = 0$ für $t < 0$. Dann schließt man aus der gleichmäßigen Konvergenz der $R_n^0(u)$ auf die Existenz einer Nullfolge $\varepsilon_n(T)$ derart, daß

$$|R^0(u) - R_n^0(u)| < \tfrac{1}{2} \varepsilon_n(T) \quad \text{in} \quad (0 < u < T). \qquad (26)$$

Ferner schließt man aus der Konvergenz der A_n^0 auf die Existenz einer Nullfolge δ_n derart, daß $|A^0 - A_n^0| < \delta_n$. Dann folgt aus (25) und (26)

$$|F(t) - F_n(t)| < \delta_n |f(t)| + \varepsilon_n(T) \int_0^t |f'(u)| \, du . \qquad (27)$$

Bei beliebigem vorgegebenen Zeitintervall $0 < t < T$ kann man also $|F(t) - F_n(t)|$ für alle $f(t)$ mit $|f(t)| < f_0$ und $|f'(t)| < g_0$ in $0 < t < T$ beliebig klein machen, wenn man nur n groß genug wählt. Insbesondere gilt also unter den angegebenen Voraussetzungen

Theorem X. Ist die Spektralfunktion

$$\chi^0(\varrho) = \lim_{n\to\infty} \chi_n{}^0(\varrho)$$

in jedem abgeschlossenen endlichen Intervall absolut stetig, so ist $\lim_{t\to\infty} R^0(t) = 0$, und die betrachteten Systeme zeigen mit wachsendem n für immer größere Zeitintervalle $0 < t < T$ praktisch schwache Irreversibilität.

Wir können natürlich keinen expliziten Zusammenhang zwischen n und T geben, solange wir kein spezielles System vor Augen haben. Speziell für Kristalle mit harmonischer Wechselwirkung der Atome hat MAZUR [8] kürzlich diesen Zusammenhang untersucht.

[8] P. MAZUR u. E. MONTROLL, J. Math. Phys. **1**, 70 [1960].

7. Schlußbemerkungen

Man kann versuchen, der praktisch schwachen Irreversibilität eine praktisch starke Irreversibilität gegenüberzustellen. Doch liegen hierzu noch keine Ergebnisse vor. Worauf es uns hier ankam, war vor allem zu zeigen, daß die Irreversibilität in einfacher Weise mit gewissen Eigenschaften der Spektralfunktionen zusammenhängt.

Die Beweise der Theoreme und anderer Aussagen sind in den unter [1] und [2] zitierten Arbeiten enthalten. Der Beweis von Theorem VIII wird von KÖNIG an anderer Stelle gegeben werden.

Herrn Kollegen H. KÖNIG, Aachen, bin ich für sein Interesse an diesen Problemen und für seine tatkräftige und wertvolle Unterstützung in der Bereitstellung der mathematischen Grundlagen sehr zu Dank verpflichtet.

Zur Theorie der „seltsamen" Teilchen

Von H.-P. DÜRR und W. HEISENBERG

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik München

(Z. Naturforschg. **16 a**, 726—747 [1961]; eingegangen am 18. Mai 1961)

The strange particles can be represented within the framework of the nonlinear spinor theory by taking into account the degeneracy with respect to isospin and parity of the groundstate "vacuum". Use is made of the mathematical analogy between the theory of superconductivity and the theory of elementary particles, and in a first approximation a fourfold degeneracy of the groundstate is assumed. Each auf the four states is considered as a mixture of states of similar symmetry. The GREEN-functions of the type $\langle \Omega_\alpha | T X(x) \overline{X}(x') | \Omega_\beta \rangle$ are considered as invariant under the proper LORENTZ-group, CPT and PG, applied on the field operators or the states $\Omega_\alpha\rangle$ separately; but as invariant under isospin rotation, P or CT or G, only if the transformation is applied on the field-operators and the states $\Omega_\alpha\rangle$ simultaneously. Parity is represented in a manner discussed in an earlier paper by one of the authors. Only stationary states of strangeness 1 can be considered in this approximation. The fourfold degeneracy of the K-meson is reduced to an additional symmetry which may be connected later with the existence of electromagnetic charge. The results of the calculations may be interpreted by describing the strange particles as composed of ordinary particles and a "spurion" taken from the groundstate "vacuum". The "spurion" carries an isospin 1/2 and a parity. The masseigenvalues and the parity of the particles are calculated by means of a slightly improved version of the TAMM–DANCOFF-method. The theoretical masseigenvalues agree qualitatively with the observed masses. The calculated relative parities of the strange particles may later be checked by experiments. Besides the known particles of strangeness 1, the theory yields other eigenstates which are probably highly unstable since they could disintegrate into more stable particles by means of strong or electromagnetic interactions.

In der Theorie der Elementarteilchen, die von der Gleichung

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \pm l^2 \gamma_\mu \gamma_5 \psi (\overline{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) = 0 \qquad (1)$$

ausgeht, war zur Interpretation der „seltsamen" Teilchen die Annahme vorgeschlagen worden [1], daß der Grundzustand „Welt" entartet sei und einen sehr hohen Isospin besitze; daß ferner ein Isospin 1/2 oder 1 von diesem Gesamtisospin abgezweigt und an ein Nukleon oder π-Meson angehängt werden könne. In dieser Weise sollten dann Hyperonen oder K-Mesonen entstehen. Im folgenden soll dieser Gedanke mathematisch durchgeführt werden. Dabei beschränken wir die Rechnungen auf die Teilchen von der „Seltsamkeit" 1. Die Erweiterung auf Teilchen höherer Seltsamkeit wird nur am Schluß kurz gestreift, aber nicht mehr ausführlich behandelt werden.

[1] H.-P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI, Z. Naturforschg. **14 a**, 441 [1959]; im folgenden als „A" zitiert.